Teoretická část - 10.6.2021

1. (a) Definujte parciální derivace (včetně derivací vyšších řádů) a totální diferenciál ($2,5$ bodu).

   (b) Zformulujte a dokažte větu o střední hodnotě (3 body).

   (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      i. je-li $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$, že $|f(x) - f(y)| \le C|x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}^2$,

      ii. je-li $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$, že $|f(x) - f(y)| \le C|x - y|$, $x, y \in U((1, 2), 3)$,

      iii. je-li $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$, že $|f(x) - f(y)| \le C|x - y|$, $x, y \in [-3, -2] \times [-1, 0]$

   ($2,5$ bodu).

2. (a) Definujte mocninnou řadu a Taylorovu řadu (2 body).

   (b) Zformulujte větu o poloměru konvergence a derivaci mocninné řady (2 body).

   (c) Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ jsou mocninné řady a $A, B \in \mathbb{R}$ jejich poloměry konvergence. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      i. mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$ má poloměr konvergence $\max(A, B)$,

      ii. mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$ má poloměr konvergence $\min(A, B)$,

      iii. mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$ má poloměr konvergence měnší, nebo roven $\max(A, B)$,

      iv. mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$ má poloměr konvergence větší, nebo roven $\min(A, B)$,

      Vše řádně zdůvodněte ($2,5$ bodu).

   (d) Dokažte následující tvrzení: nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence 9. Označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-9, 9)$. Potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je Taylorovou řadou funkce f se středem v bodě 0 ($1,5$ bodu).

3. (a) Definujte metrický prostor, kompaktní metrický prostor a kompaktní množinu (2 body).
   (b) Zformulujte a dokažte větu o kompaktnosti v $\mathbb{R}^d$ (3 body).
   (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
      i. je-li $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ konvergentní posloupnost s limitou a, potom je množina
      $$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$
      kompaktní v $\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou,
      ii. je-li $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ konvergentní posloupnost s limitou a, potom je množina
      $$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$$
      kompaktní v $\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou,
      iii. je-li (M, ρ) kompaktní metrický prostor, $U \subseteq M$ otevřená, potom je U kompaktní,
      iv. je-li (M, ρ) kompaktní metrický prostor, $K \subseteq M$ uzavřená, potom je K kompaktní.

   Vše řádně zdůvodněte (3 body).